

## **IV. PAPRASTOSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS**

### **1. Individualios užduotys:**

- trumpa teorijos apžvalga,
- pavyzdžiai,
- užduotys savarankiškam darbui.

Pirmosios eilės diferencialinių lygčių sprendimas .....	2 psl.
Antrosios eilės paprasčiausių diferencialinių lygčių sprendimas .....	9 psl.
Antrosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais sprendimas .....	16 psl.
Tiesinių diferencialinių lygčių sistemų sprendimas .....	23 psl.
Fizikos uždaviniai, suvedami į pirmosios eilės diferencialines lygtis .....	26 psl.
Geometrijos uždaviniai, suvedami į pirmosios eilės diferencialines lygtis .....	27 psl.
Pirmosios eilės diferencialinių lygčių skaitinis sprendimas..	30 psl.

### **2. Išspręstosios užduotys.....33 psl.**

# 1. Individualios užduotys

## Diferencialinių lygčių sprendimas ir taikymas

### Pirmosios eilės diferencialinių lygčių sprendimas

Pirmosios eilės diferencialine lygtimi vadinama lygtis, siejanti nepriklausomą kintamąjį  $x$ , nežinomą funkciją  $y$  ir jų diferencialus

$$dx, dy \text{ arba išvestinę } y' = \frac{dy}{dx}.$$

Pirmosios eilės diferencialinės lygties pavidalai:

$$y' = f(x, y), \quad F(x, y, y') = 0 \text{ arba } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Pirmosios eilės diferencialinės lygties bendruoju sprendiniu vadinama funkcija  $y = \varphi(x, C)$ , kurią įrašius į lygtį, gaunama tapatybė.

Norint rasti bendrąjį sprendinį, reikia atpažinti lygties tipą ir taikyti atitinkamą sprendimo metodą.

Čia nagrinėsime tokius lygčių tipus:

- 1) paprasčiausios lygtys (žymėsime  $P$ )
- 2) su atskiriamais kintamaisiais ( $A$ )
- 3) homogeninės ( $H$ )
- 4) tiesinės ( $T$ )
- 5) Bernulio ( $B$ )
- 6) pilnųjų diferencialų ( $D$ ).

Paprasčiausios lygtys yra tokios:  $y' = f(x)$ .

Nežinoma funkcija  $y$  gaunama integruojant išvestinę:

$$y = \int y' dx = \int f(x) dx.$$

Su atskiriamais kintamaisiais vadinama lygtis

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ arba } f_1(x) \cdot g_1(y) dx = f_2(x) \cdot g_2(y) dy.$$

Jei lygtyje yra išvestinė, tai įrašius  $y' = \frac{dy}{dx}$  ir po to atskyrus

kintamuosius, integruojamos abi lygties pusės:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad \text{arba} \quad \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy.$$

Dviejų kintamųjų funkcija  $f(x, y)$  vadinama  $k$ -ojo laipsnio homogenine funkcija, jei teisinga tokia lygybė:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Pirmosios eilės diferencialinė lygtis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

vadinama homogenine, jei  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  yra to paties laipsnio homogeninės funkcijos.

Lygtis  $y' = f(x, y)$  vadinama homogenine, jei  $f(x, y)$  yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija.

Homogeninę diferencialinę lygtį galima pertvarkyti į tokį pavidalą:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \text{ Pakeitę ieškomą funkciją } y=y(x) \text{ nauja nežinoma}$$

funkcija  $u=u(x)$  pagal lygybę  $u = \frac{y}{x}$  ir į homogeninę lygtį vietoje  $y$  ir

$y'$  įrašę  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ , gauname lygtį su atskiriamais kintamaisiais.

*Pavyzdys*

Rasime diferencialinės lygties  $(2x + 3y)dy = ydx$

bendrąjį sprendinį.

Duotąją lygtį pertvarkome:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + 3y}, \quad y' = \frac{\frac{y}{x}}{2 + 3 \cdot \frac{y}{x}}.$$

Pakeičiame kintamąjį pagal lygybę  $u = \frac{y}{x}$  ir į homogeninę lygtį įrašę

$y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ , gauname tokią lygtį:

$$u'x + u = \frac{u}{2 + 3u}.$$

Šią lygtį pertvarkome ir atskiriame kintamuosius:

$$u'x = \frac{-3u^2 - u}{2 + 3u} \Rightarrow \frac{3u + 2}{3u^2 + u} du = -\frac{dx}{x}.$$

Abi gautosios lygties puses integruojame:

$$\int \frac{3u + 2}{3u^2 + u} du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{3u + 2}{u(u + \frac{1}{3})} du = -3 \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \left( \frac{A}{u} + \frac{B}{u + \frac{1}{3}} \right) du = -3 \ln|x|.$$

Randame neapibrėžtuosius koeficientus iš tapatybės

$$A\left(u + \frac{1}{3}\right) + Bu = 3u + 2,$$

paėmę  $u=0$  ir  $u=-\frac{1}{3}$ :  $A=6$ ,  $B=-3$ .

Tuomet:

$$\int \left( \frac{6}{u} - \frac{3}{u + \frac{1}{3}} \right) du = -3 \ln|x|,$$

$$2 \ln|u| - \ln\left|u + \frac{1}{3}\right| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln\left|\frac{u^2}{u + \frac{1}{3}}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow \left|\frac{u^2}{u + \frac{1}{3}}\right| = \left|\frac{C}{x}\right|,$$

$$\frac{u^2}{u + \frac{1}{3}} = \pm \frac{C}{x} \Rightarrow u^2 x = C_1 \left( u + \frac{1}{3} \right), \quad C_1 \neq 0.$$

Vietoje  $u$  įrašę  $\frac{y}{x}$  ir pertvarkę gauname diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį:

$$y^2 = C_1 \left( y + \frac{1}{3} x \right).$$

Pirmosios eilės tiesinė diferencialinė lygtimi vadinama lygtis

$$y' + p(x)y = g(x),$$

o Bernulio lygtimi –

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1).$$

Abi šias lygtis galima išspręsti Bernulio metodu. Jo esmė tokia: nežinoma funkcija  $y$  keičiama dviejų funkcijų  $u(x)$  ir  $v(x)$  sandauga

$y = u(x) \cdot v(x)$ . Viena iš jų tam tikru būdu parenkama, o kita apskaičiuojama. Įrašę  $y = uv$  ir  $y' = u'v + uv'$ , pavyzdžiui, į tiesinę lygtį, gauname:

$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x) \Rightarrow u'v + u(v' + p(x)v) = g(x).$$

Šiuo atveju parenkame funkciją  $v$ . Ji yra vienas diferencialinės lygties

$$v' + p(x)v = 0$$

sprendinys. Po to iš paprasčiausios diferencialinės lygties

$$u'v = g(x)$$

gauname funkciją  $u$ .

*Pavyzdys*

Raskime diferencialinės lygties

$$y' - \frac{y}{x} = x \cos x$$

bendrąjį sprendinį.

Ši lygtis yra tiesinė. Ją sprendžiame Bernulio metodu.

Taigi įrašome  $y = uv$  ir  $y' = u'v + uv'$  į duotąją lygtį ir pertvarkome:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \cos x \Rightarrow u'v + u \left( v' - \frac{v}{x} \right) = x \cos x.$$

1) Sprendžiame lygtį  $v' - \frac{v}{x} = 0$ . Ši lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais. Todėl atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x|, \\ |v| = |x| \Rightarrow v = \pm x.$$

Prenkame vieną funkciją  $v$ , pavyzdžiui,  $v = x$ .

2) Įrašę šią funkciją  $v$  į lygtį

$$u'v + u \left( v' - \frac{v}{x} \right) = x \cos x,$$

gauname:

$$u'x = x \cos x \Rightarrow u' = \cos x.$$

Iš čia:  $u = \int \cos x dx \Rightarrow u = \sin x + C$ .

Taigi  $y = (\sin x + C)x$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Pilnųjų diferencialų lygtimi vadinama lygtis

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

kai jos kairioji pusė yra kaž kurios funkcijos  $U(x, y)$  pilnasis diferencialas:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dU(x, y).$$

Šitaip bus, jei  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ .

Pilnųjų diferencialų lygties bendrasis sprendinys:  $U(x, y) = C$ .

Funkciją  $U(x, y)$  galima rasti pagal tokią formulę:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy;$$

čia  $x_0$  ir  $y_0$  yra laisvai parinkti skaičiai, kuriems užrašytieji integralai turi prasmę.

1 uždavinys. Raskite dviejų pirmosios eilės diferencialinių lygčių bendruosius sprendinius:

$$1) xy' = y \left( 1 + \ln \frac{y}{x} \right)$$

$$y' + y = e^{-x}$$

$$2) y' - \frac{y}{x} = x^2$$

$$ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$$

$$3) y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$xy' + y = \sin x$$

$$4) y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$$

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$5) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$y' - y \operatorname{tg} x = 1$$

$$6) y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

$$xy' + 2\sqrt{xy} = y$$

$$7) xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$$

$$8) y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$$

$$9) xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$y' \cos x + y \sin x = 1$$

$$10) y' - \frac{y}{x+1} = e^x (x+1)$$

$$xy' - y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0$$

$$11) y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$xy' + y = \ln x + 1$$

$$12) y' - \frac{y}{x} = x \sin x$$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{6y}{x} + 6$$

- 13)  $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$      $y' - y = e^x$
- 14)  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$      $(xy - x^2)y' = y^2$
- 15)  $\sqrt{\frac{x}{y}} dy = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 2\right) dx$      $y' \operatorname{ctgx} + y = 2 \cos^2 x \cdot \operatorname{ctgx}$
- 16)  $y' + \frac{y}{2x} = x^2$      $\left(y \sin \frac{y}{x} - x\right) dx = x \sin \frac{y}{x} dy$
- 17)  $2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx$      $y' - 2y = e^{2x}$
- 18)  $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$      $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x}$
- 19)  $xy dy = (x^2 + y^2) dx$      $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$
- 20)  $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$      $(xy' - y) \arcsin \frac{y}{x} = x$
- 21)  $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$      $xy' + y = e^x$
- 22)  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$      $2xy'(x^2 + y^2) = y(2x^2 + y^2)$
- 23)  $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$      $y' - 2y \operatorname{ctgx} = \sin^3 x$
- 24)  $y' + \frac{2y}{x} = x^3$      $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$
- 25)  $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$      $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$
- 26)  $y' + \frac{y}{x} = 3x$      $(x - y) dy = y dx$
- 27)  $x \sin \frac{y}{x} \cdot y' + x = y \sin \frac{y}{x}$      $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$



$$\begin{aligned}
28) \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} &= 1+x^2 & xy' - y + x \operatorname{ctg} \frac{y}{x} &= 0 \\
29) \quad \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx &= \frac{2y}{x} dy & y' - \frac{2xy}{1+x^2} &= 2x(x^2+1) \\
30) \quad y' + \frac{3y}{x} &= \frac{2}{x^3} & 2x^2 y' - 4xy &= y^2
\end{aligned}$$

### Antrosios eilės paprasčiausių diferencialinių lygčių sprendimas

Antrosios eilės diferencialine lygtimi vadinama lygtis

$F(x, y, y', y'') = 0$ , kurioje yra nežinomos funkcijos  $y$  antroji išvestinė ir aukštesnių eilių išvestinių nėra. Lygties bendrasis sprendinys  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ , turintis dvi laisvasias konstantas yra tokia funkcija, kurią įrašius į diferencialinę lygtį gaunama tapatybė. Kai žinomos pradinės sąlygos  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ , randamas diferencialinės lygties atskirasis sprendinys.

Antrosios eilės diferencialinė lygtis vadinama paprasčiausia, jei joje nėra arba  $x$ , arba  $y$ , arba  $y$  ir  $y'$ . Šiais atvejais dar sakoma, kad galima sumažinti diferencialinės lygties eilę.

Iš pradžių nagrinėkime lygtį

$$y'' = f(x), \quad (P_1)$$

kurioje nėra nei  $y$ , nei  $y'$ . Šiuo atveju integruodami pirmiausia randame  $y'$ :

$$y' = \int y'' dx = \int f(x) dx.$$

Po to integruodami gautąją išvestinę  $y'$ , randame  $y$ :

$$y = \int y' dx.$$

Spręsdami diferencialinę lygtį

$$F(x, y, y') = 0, \quad (P_2)$$

kurioje nėra ieškomos funkcijos  $y$ , keičiame kintamąjį pagal lygybę  $z = y'$  (čia  $z$  – nauja nežinoma funkcija). Tuomet  $y'' = z'$ , ir gaunama pirmosios eilės diferencialinė lygtis:

$F(x, z, z') = 0$ . Radę šios lygties bendrąjį sprendinį

$z = \varphi_1(x, C_1)$  ir vietoje  $z$  įrašę  $y'$ , vėl gauname pirmosios eilės diferencialinę lygtį  $y' = \varphi_1(x, C_1)$ . Išsprendę šią lygtį gauname  $(P_2)$  lygties bendrąjį sprendinį.

Spresdami diferencialinę lygtį

$$F(y, y', y'') = 0, \quad (P_3)$$

kurioje nėra nepriklausomo kintamojo  $x$ , keičiame kintamąjį pagal lygybę  $p = y'$  (čia  $p$  – nauja nežinoma funkcija). Tuomet

$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ , ir gaunama pirmosios eilės diferencialinė lygtis

$$F(y, p, \frac{dp}{dy}) = 0.$$

*Pavyzdžiai*

1) Rasime lygties  $y'' = x \cos x$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

Matome, kad duotoji lygtis yra pirmojo tipo, todėl pirmiausia ieškome  $y'$ :

$$y' = \int y'' dx = \int x \cos x dx = \int x d \sin x.$$

Integruojame dalimis:

$$y' = x \sin x - \int \sin x dx,$$

$$y' = x \sin x + \cos x + C_1.$$

Pritaikę pradines sąlygas  $x = 0$  ir  $y'(0) = 1$ , galime rasti laisvąją konstantą  $C_1$ :  $1 = 1 + C_1$ . Iš čia gauname, kad  $C_1 = 0$ .

Taigi

$$y' = x \sin x + \cos x.$$

Integruodami gautąją išvestinę  $y'$ , ieškome  $y$ :

$$y = \int y' dx = \int (x \sin x + \cos x) dx = \int x \sin x dx + \int \cos x dx.$$

$$y = -\int x d \cos x + \sin x = -x \cos x + \int \cos x dx + \sin x,$$

$$y = -x \cos x + 2 \sin x + C_2.$$

Pritaikę pradines sąlygas  $x = 0$  ir  $y = 0$ , randame laisvąją konstantą  $C_2$ :  $0 = C_2$ . Tuomet

$$y = -x \cos x + 2 \sin x.$$

2) Rasime lygties  $y' \operatorname{ctg} 2x + 2y = 0$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

Pastebime, kad lygtyje nėra funkcijos  $y$ , todėl keičiame kintamąjį pagal lygybę  $z = y'$ . Tuomet  $y'' = z'$ , ir gauname pirmosios eilės diferencialinę lygtį:

$$z' \operatorname{ctg} 2x + 2z = 0.$$

Ši lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais. Todėl:

$$z' = -2z \cdot \operatorname{ctg} 2x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2z \cdot \operatorname{ctg} 2x \Rightarrow \frac{dz}{z} = -2 \operatorname{ctg} 2x dx.$$

Atskyrę kintamuosius abi puses integruojame:

$$\int \frac{dz}{z} = -\int 2 \operatorname{ctg} 2x dx \Rightarrow \ln|z| = -\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} d2x,$$

$$\ln|z| = \int \frac{d \cos 2x}{\cos 2x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|\cos 2x| + \ln|C|,$$

$$z = C_1 \cos 2x \Rightarrow y' = C_1 \cos 2x.$$

Pritaikę pradines sąlygas  $x = 0$  ir  $y'(0) = 1$ , galime rasti laisvąją konstantą  $C_1$ :  $1 = C_1$ .

Taigi

$$y' = \cos 2x.$$

Integruodami gauname:

$$y = \int y' dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_2.$$

Pritaikę pradines sąlygas  $x = 0$  ir  $y = 0$ , randame konstantą  $C_2 = 0$ . Tuomet

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

3) Rasime lygties  $y''y^3 = -25$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:  $y(2) = 5$ ,  $y'(2) = 1$ .

Pastebime, kad lygtyje nėra  $x$ , todėl keičiame kintamąjį pagal

lygybes  $y' = p$ ,  $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ . Tuomet gauname tokią pirmosios

eilės diferencialinę lygtį  $p \cdot \frac{dp}{dy} \cdot y^3 = -25$ . Joje atskiriame

kintamuosius ir integruojame:

$$p dp = \frac{-25}{y^3} dy \Rightarrow \int p dp = \int \frac{-25}{y^3} dy,$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{-25y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow y'^2 = \frac{25}{y^2} + C_1.$$

Pritaikę pradines sąlygas  $y = 5$  ir  $y' = 1$ , randame konstantą  $C_1 = 0$ .  
Tuomet

$$y'^2 = \frac{25}{y^2}.$$

Atsižvelgę, kad  $y$  ir  $y'$  yra teigiamos, gauname:

$$y' = \frac{5}{y}.$$

Tuomet:  $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{y} \Rightarrow y dy = 5 dx \Rightarrow \int y dy = \int 5 dx,$

$$\frac{y^2}{2} = 5x + C_2.$$

Pritaikę pradines sąlygas  $x = 2$  ir  $y = 5$ , randame konstantą

$C_2 = \frac{5}{2}$ . Tuomet  $y = \sqrt{5(2x+1)}$ .

2 uždavinys. Raskite dviejų antrosios eilės diferencialinių lygčių atskiruosius sprendinius, tenkinančius pradines sąlygas:

- 1)  $y'' = 50y^3$ ;  $y(3) = 1$ ,  $y'(3) = 5$   
 $y'' \operatorname{tg} x = y + 1$ ;  $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
- 2)  $y'' = -2yy^3$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$   
 $y'' = \frac{1}{x} \cdot y' + x$ ;  $y(1) = \frac{1}{3}$ ,  $y'(1) = 1$
- 3)  $y'' = -\frac{1}{2y^3}$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $y'' = 6x + \sin x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$
- 4)  $y'' = -\frac{16}{y^3}$ ;  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = 2$   
 $x^4 y'' + x^3 y' = 4$ ;  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = -1$
- 5)  $xy'' - y' = x^2 e^x$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = e$   
 $y'' = 98y^3$ ;  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 7$
- 6)  $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$   
 $xy'' + y' = x + 1$ ;  $y(1) = \frac{5}{4}$ ,  $y'(1) = \frac{5}{2}$
- 7)  $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ ;  $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{3}$ ,  $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$   
 $y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$
- 8)  $y'' = e^{2y}$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$   
 $y'' = \frac{1}{x^2}$ ;  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 0$
- 9)  $y'' = xe^{-2x}$ ;  $y(0) = \frac{1}{4}$ ,  $y'(0) = -\frac{1}{4}$

- $(y-1)y'' = 2y'^2; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$   
 10)  $y'' = 72y^3; \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6$   
 $xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$   
 11)  $x \ln x \cdot y'' = y'; \quad y(\vartheta) = 0, \quad y'(\vartheta) = 1$   
 $y^3 y'' = -49; \quad y(0) = -7, \quad y'(0) = -1$   
 12)  $yy'' = y'^2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$   
 $xy'' - 2y' = -\frac{2}{x^2}; \quad y(1) = -\frac{1}{3}, \quad y'(1) = 1$   
 13)  $y'' = \ln x; \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad y'(1) = 0$   
 $2yy'' = 1 + y'^2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$   
 14)  $y'' = 32 \sin^3 y \cos y; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 4$   
 $\operatorname{ctg} x \cdot y'' = -(1 + y'); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$   
 15)  $xy'' = -y'; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$   
 $y^3 y'' + 9 = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$   
 16)  $y^3 y'' + 36 = 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$   
 $xy'' + y' = \sqrt{x}; \quad y(1) = \frac{4}{9}, \quad y'(1) = \frac{2}{3}$   
 17)  $y'' = \frac{1}{x}; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$   
 $y'' = 8y^3; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$   
 18)  $yy'' = -y'^2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$   
 $xy'' - y' = -\frac{1}{x}; \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{3}{2}$

- 19)  $x^2 y'' + xy' = 1$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 0$   
 $y'' = 2yy'$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$
- 20)  $y^3 y'' = 1$ ;  $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ,  $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$   
 $xy'' + y' = 1$ ;  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$
- 21)  $y'' = x + \cos x$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$   
 $y'' = 18\sin^3 y \cos y$ ;  $y(1) = \frac{\pi}{2}$ ,  $y'(1) = 3$
- 22)  $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$   
 $y'' = \frac{2}{x^3}$ ;  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = -1$
- 23)  $(1 + x^2)y'' = 2xy'$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$   
 $y^3 y'' = -4$ ;  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -2$
- 24)  $yy'' + y'^2 = 1$ ;  $y(\sqrt{2}) = 1$ ,  $y'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$   
 $(1 + \sin x)y'' = \cos x \cdot y'$ ;  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 1$
- 25)  $y'' = 128y^3$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 8$   
 $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$ ;  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(1) = e$
- 26)  $y'' = 2y^3$ ;  $y(-1) = 1$ ,  $y'(-1) = 1$   
 $y'' \operatorname{tg} x = y'$ ;  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 27)  $y^3 y'' = -64$ ;  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 2$   
 $y'' = x \sin x$ ;  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$
- 28)  $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$   
 $xy'' + y' = 3x^2$ ;  $y(1) = \frac{1}{3}$ ,  $y'(1) = 1$

$$29) y'' = 8 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 2$$

$$y'' = \frac{y'}{x} \cdot \ln \frac{y'}{x}; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = e^2$$

$$30) yy'' = 2y'^2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = \frac{1}{1+x^2}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

### Antrosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių su pastoviaisiais koeficientais sprendimas

Antrosios eilės tiesinė diferencialinė lygtimi su pastoviaisiais koeficientais vadinama lygtis

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Kai dešinioji lygties pusė yra 0, lygtis vadinama homogenine, priešingu atveju, – nehomogenine.

Homogeninė lygtis

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (H)$$

turi trivialų sprendinį  $y = 0$ . Jei  $y_1(x)$  ir  $y_2(x)$  yra homogeninės lygties sprendiniai, o  $C_1$  ir  $C_2$  – bet kurie realieji skaičiai, tai funkcija  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  taip pat yra homogeninės lygties sprendinys.

Funkcijos  $y_1(x)$  ir  $y_2(x)$  vadinamos tiesiškai nepriklausomomis intervale  $(a; b)$ , jei tapatybė  $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$  teisinga tik tada, kai  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Funkcijų  $y_1(x)$  ir  $y_2(x)$  Vronskio determinantu vadinamas toks determinantas:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$



Funkcijos  $y_1(x)$  ir  $y_2(x)$  yra tiesiškai nepriklausomos intervale  $(a; b)$  tik tada, kai jų Vronskio determinantas visiems  $x \in (a; b)$  nelygus nuliui.

Bet kurie du tiesiškai nepriklausomi homogeninės lygties sprendiniai  $y_1(x)$  ir  $y_2(x)$  sudaro fundamentalią sprendinių sistemą. Tuomet  $(H)$  lygties bendrasis sprendinys yra toks:

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Kvadratinė lygtis

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (Ch)$$

kuri gaunama homogeninėje lygtyje  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  pakeitus

$y'', y', y$  atitinkamai  $\lambda^2, \lambda$  ir 1, vadinama charakteristine lygtimi.

Jei  $(Ch)$  lygties šaknys  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  yra realiosios ir skirtingos, tai

funkcijos  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  ir  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  sudaro fundamentalią sprendinių sistemą. Šiuo atveju

$$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Jei charakteristinės lygties šaknys  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  yra lygios ( $\lambda_2 = \lambda_1$ ),

tai funkcijos  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  ir  $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$  sudaro fundamentalią sprendinių sistemą. Šiuo atveju

$$y_0 = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

Jei charakteristinės lygties šaknys  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  yra kompleksinės, t. y.

$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ,  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ , tai funkcijos  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  ir

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$  sudaro fundamentalią sprendinių sistemą. Šiuo atveju homogeninės lygties bendrasis sprendinys

$$y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Antrosios eilės tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygties

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

bendrasis sprendinys  $y$  lygus šios lygties atskirojo sprendinio  $\tilde{y}$  ir homogeninės lygties bendrojo sprendinio  $y_0$  sumai:

$$y = y_0 + \tilde{y}.$$

Nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį  $\tilde{Y}$  galima rasti neapibrėžtųjų koeficientų metodu, kai lygties dešinioji pusė  $f(x)$  yra specialaus pavidalo.

Išskirsime tokius tris atvejus:

1)  $f(x) = e^{ax} P_m(x)$ ; čia  $P_m(x)$  yra  $m$ -ojo laipsnio daugianaris,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Šiuo atveju  $\tilde{Y} = e^{ax} Q_m(x) \cdot x^k$ ; čia  $Q_m(x)$  yra  $m$ -ojo laipsnio daugianaris su neapibrėžtais koeficientais. Pavyzdžiui, kai  $m=2$ ,

$$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Laipsnio rodiklis  $k$  parodo, kiek kartų  $a$  yra charakteristinės lygties šaknimi;  $k$  gali įgyti tris reikšmes:  $k = 0, 1, 2$ .

2)  $f(x) = e^{ax}(c \cdot \cos bx + d \cdot \sin bx)$ .

Šiuo atveju  $\tilde{Y} = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx) \cdot x^r$ ; čia  $A$  ir  $B$  yra neapibrėžtieji koeficientai. Laipsnio rodiklis  $r$  parodo, kiek kartų  $a + bi$  yra charakteristinės lygties šaknimi;  $r$  gali įgyti dvi reikšmes:  $r = 0, 1$ .

3)  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ; čia  $f_1(x)$  ir  $f_2(x)$  yra pirmojo arba antrojo tipo funkcijos.

Šiuo atveju nehomogeninės lygties  $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$  atskirasis sprendinys  $\tilde{Y}$  gaunamas sudedant dviejų nehomogeninių lygčių

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$$

atskirusius sprendinius  $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ :  $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$ .

*Pavyzdžiai*

1) Rasime lygties  $y'' - 3y' + 2y = 3x + 2$  bendrąjį sprendinį.

Iš pradžių sprendžiame homogeninę lygtį

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Jos charakteristinė lygtis:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Šios lygties šaknys  $\lambda_1=1$  ir  $\lambda_2=2$  yra realiosios ir skirtingos. Todėl homogeninės lygties bendrasis sprendinys

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Nehomogeninės lygties dešinioji pusė  $f(x)$  yra pirmojo tipo,  $m=1$  ir laipsnio rodiklio dauginamasis  $a=0$  nėra charakteristinės lygties šaknimi, todėl atskirojo sprendinio  $\tilde{y}$  pavidalas yra toks:

$$\tilde{y} = Ax + B.$$

Neapibrėžtieji koeficientai  $A$  ir  $B$  parenkami tokie, kad funkcija  $\tilde{y} = Ax + B$  būtų nehomogeninės lygties

$$y'' - 3y' + 2y = 3x + 2$$

sprendinys. Todėl ieškome išvestinių:

$$\tilde{y}' = A, \quad \tilde{y}'' = 0.$$

Įrašę šias išvestines į nehomogeninę lygtį, gauname tapatybę:

$$-3A + 2(Ax + B) = 3x + 2.$$

Iš jos apskaičiuojame, kad  $A = \frac{3}{2}$ ,  $B = \frac{13}{4}$ .

Tuomet nehomogeninės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}.$$

2) Rasime lygties  $y'' + 4y' + 4y = e^x \sin x$  bendrąjį sprendinį.

Iš pradžių sprendžiame homogeninę lygtį

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Jos charakteristinė lygtis:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Šios lygties šaknys  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ . Todėl homogeninės lygties bendrasis sprendinys

$$y_0 = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

Nehomogeninės lygties dešinioji pusė  $f(x)$  yra antrojo tipo, laipsnio rodiklio dauginamasis  $a = 1$ ,  $1+i$  nėra charakteristinės lygties šaknis, todėl atskirojo sprendinio  $\tilde{Y}$  pavidalas yra toks:

$$\tilde{y} = e^x (A \cos x + B \sin x).$$

Neapibrėžtieji koeficientai  $A$  ir  $B$  parenkami tokie, kad funkcija  $\tilde{Y}$  būtų nehomogeninės lygties sprendinys. Todėl ieškome išvestinių:

$$\tilde{y}' = e^x (A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x),$$

$$\tilde{y}'' = e^x (-2A \sin x + 2B \cos x).$$

Įrašę šias išvestines į nehomogeninę lygtį, gauname tapatybę:

$$(-6A + 8B) \sin x + (8A + 6B) \cos x \equiv \sin x.$$

Sulyginame abiejų lygybės pusių  $\sin x$  ir  $\cos x$  koeficientus:

$$\begin{cases} -6A + 8B = 1, \\ 8A + 6B = 0 \end{cases}$$

Iš šios sistemos apskaičiuojame, kad  $A = -\frac{3}{50}$ ,  $B = \frac{2}{25}$ .

Tuomet nehomogeninės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x) + e^x \left( -\frac{3}{50} \cos x + \frac{2}{25} \sin x \right).$$

3) Rasime lygties  $y'' + y = e^x + x^2$  bendrąjį sprendinį.

Iš pradžių sprendžiame homogeninę lygtį

$$y'' + y = 0.$$

Jos charakteristinė lygtis:

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Šios lygties šaknys  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Todėl homogeninės lygties bendrasis sprendinys

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nehomogeninės lygties dešinioji pusė  $f(x)$  yra trečiojo tipo, todėl atskirasis sprendinys  $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$ .

$\tilde{y}_1$  yra nehomogeninės lygties  $y'' + y = e^{2x}$  atskirasis sprendinys.

Jo pavidalas:  $\tilde{y}_1 = Ae^{2x}$ .

Rasime neapibrėžtajį koeficientą  $A$ :

$$\tilde{y}_1' = 2Ae^{2x}, \quad \tilde{y}_1'' = 4Ae^{2x}, \quad 4Ae^{2x} + Ae^{2x} \equiv e^{2x},$$

$$A = \frac{1}{5}.$$

$\tilde{y}_2$  yra nehomogeninės lygties  $y'' + y = x^2$  atskirasis sprendinys.

Jo pavidalas:  $\tilde{y}_2 = Ax^2 + Bx + C$ .

Rasime neapibrėžtuosius koeficientus  $A$ ,  $B$  ir  $C$ :

$$\tilde{y}_2' = 2Ax + B, \quad \tilde{y}_2'' = 2A, \quad 2A + Ax^2 + Bx + C \equiv x^2,$$

$$A = 1, B = 0, C = -2.$$

Tuomet

$$\tilde{y} = \frac{1}{5}e^{2x+x^2} - 2,$$

o nehomogeninės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{2x+x^2} - 2.$$

3 uždavinys. Raskite antrosios eilės diferencialinių lygčių bendruosius sprendinius:

$$1) y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x \qquad y'' + y = \cos x$$

$$2) y'' - 4y' + 5y = e^x \cdot 2x \\ y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$$

$$3) y'' - 5y' + 4y = e^x \qquad y'' - 2y' + y = 2\sin x + 4\cos x$$

- 4)  $y'' - 3y' = 18x - e^x$   $y'' + 2y' + y = x + \sin x$   
5)  $y'' - 2y' = 6x^2 - 2x + 3$   $y'' + y = \sin x$   
6)  $y'' - 3y' + 2y = 4x^2 + 2x + 1$   $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$   
7)  $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$   $y'' - 2y' + y = 2\sin x + \cos x$   
8)  $y'' - 5y' + 4y = e^{2x} \cdot (2x - 1)$   $y'' - 3y' = \cos x$   
9)  $y'' - 2y' + 2y = e^{-x} \cdot (5x - 4)$   $y'' - 2y' + y = \cos x$   
10)  $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4x + 1$   $y'' + 2y' + 2y = \sin 2x$   
11)  $y'' - 4y' + 5y = 10e^{-x}$   $y'' - y = \cos x$   
12)  $y'' - y' = 3x^2 + 2x - 5$   $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$   
13)  $y'' - 2y' + y = x + e^{2x}$   $y'' - 4y = \sin 2x$   
14)  $y'' - 4y' + 3y = e^x$   $y'' + 4y = \cos 2x$   
15)  $y'' - 4y' + 5y = e^{-x} \cdot (10x + 4)$   $y'' - 2y' = \sin 2x$   
16)  $y'' - 2y' + 2y = e^{3x} \cdot (5x - 1)$   $y'' - 2y' = 5\cos x$   
17)  $y'' + y' = 6x + e^x$   $y'' - 2y' + y = \sin x$   
18)  $y'' + y = x + 2e^x$   $y'' + 2y' = -5\sin x$   
19)  $y'' - y' = x^2 - 2x - 3$   $y'' + y' - 2y = 3\cos x + \sin x$   
20)  $y'' + 4y = xe^{2x}$   $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$   
21)  $y'' + 9y = e^{3x}$   $y'' - 2y' + y = 2\cos x + 2\sin x$   
22)  $y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \cdot (6x + 2)$   
 $y'' - 2y' + y = 2\cos x - 4\sin x$   
23)  $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$   
 $y'' - 2y' + y = 4\cos x - 4\sin x$   
24)  $y'' - 5y' + 4y = e^{-x} \cdot (10x + 3)$   
 $y'' - 3y' - 4y = -34\cos x$

- 25)  $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - x + 1$        $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$   
 26)  $y'' - 2y' = 3x^2 + x - 2$   
        $y'' + 4y' + 4y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$   
 27)  $y'' - y' = 2x^2 - 5$      $y'' - 3y' - 4y = -68\cos x$   
 28)  $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$      $y'' - 4y' + 4y = \sin x$   
 29)  $y'' - 2y' = x^2 - 5x + 1$   
        $y'' - 3y' + 2y = \sin x - 3\cos x$   
 30)  $y'' - 5y' + 4y = e^{2x} \cdot (4x + 3)$   
        $y'' - 3y' + 2y = -\sin x + 3\cos x$

### Tiesinių diferencialinių lygčių sistemų sprendimas

Dviejų tiesinių diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

kurioje nežinomos funkcijos yra  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , galima spręsti suvedant sistemą į antrosios eilės diferencialinę lygtį

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ . Tuo tikslu diferencijuojame antrąją sistemos lygtį:  $y'' = a_{21}x' + a_{22}y'$ . Į šią lygtį įrašę  $x'$  išraišką iš sistemos pirmosios lygties, gauname lygtį

$$y'' = a_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{22}y'.$$

Į šią lygtį įrašę  $x$  išraišką iš sistemos antrosios lygties, gauname

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  pavidalo lygtį. Sudarę šios lygties charak-

teristinę lygtį  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$  ir suradę jos šaknis, gauname

bendrąjį sprendinį  $y = y(t)$ . Apskaičiavę  $y'$ , iš sistemos antrosios lygties gauname nežinomą funkciją  $x = x(t)$ .

### Pavyzdys

Rasime diferencialinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y \end{cases}$$

bendrąjį sprendinį  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

Diferencijuojame antrąją sistemos lygtį:  $y'' = x' - y'$ . Į šią lygtį įrašę  $x'$  išraišką iš sistemos pirmosios lygties, gauname lygtį

$$y'' = -3x - y - y'.$$

Į šią lygtį įrašę  $x$  išraišką iš sistemos antrosios lygties, gauname:

$$y'' = -3(y' + y) - y - y' \Rightarrow y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Sudarę gautosios lygties charakteristinę lygtį  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$  ir suradę jos šaknis  $\lambda_{1,2} = -2$ , gauname bendrąjį sprendinį  $y$

$$= e^{-2t}(C_1 + C_2 t).$$

Apskaičiuojame  $y'$ :

$$y' = e^{-2t}(-2C_1 - 2C_2 t + C_2).$$

Iš sistemos antrosios lygties gauname:

$$x = y' + y.$$

Įrašome  $y$  ir  $y'$  išraiškas į šią lygtį:

$$x = e^{-2t}(-2C_1 - 2C_2 t + C_2) + e^{-2t}(C_1 + C_2 t),$$

$$x = e^{-2t}(-C_1 - C_2 t + C_2).$$

*4 uždavinys.* Raskite diferencialinių lygčių sistemų bendruosius sprendinius  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , suvedami sistemą į antrosios eilės diferencialinę lygtį  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ .

$$1) \begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = -2x + y \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y \end{cases}$$



$$\begin{array}{lll}
4) \begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = -2x + 11y \end{cases} & 5) \begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y \end{cases} & 6) \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y \end{cases} \\
7) \begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y \end{cases} & 8) \begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 3x + 6y \end{cases} & 9) \begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = -3x + 9y \end{cases} \\
10) \begin{cases} x' = x + 6y, \\ y' = -2x + 9y \end{cases} & 11) \begin{cases} x' = -y, \\ y' = x \end{cases} & 12) \begin{cases} x' = -2y, \\ y' = x \end{cases} \\
13) \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases} & 14) \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y \end{cases} & 15) \begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y \end{cases} \\
16) \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y \end{cases} & 17) \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y \end{cases} & 18) \begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y \end{cases} \\
19) \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y \end{cases} & 20) \begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = 7x + 3y \end{cases} & 21) \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = 3x + y \end{cases} \\
22) \begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 2x + 3y \end{cases} & 23) \begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y \end{cases} & 24) \begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x \end{cases} \\
25) \begin{cases} x' = y, \\ y' = x \end{cases} & 26) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2x + 3y \end{cases} & 27) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4x + 2y \end{cases} \\
28) \begin{cases} x' = 4x + y, \\ y' = 3x + 2y \end{cases} & 29) \begin{cases} x' = 6x - 2y, \\ y' = 3x + y \end{cases} & 30) \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y \end{cases}
\end{array}$$

### Fizikos uždaviniai, suvedami į pirmosios eilės diferencialines lygtis

Tarkime, kad kuriam nors procesui aprašyti pakanka dviejų kintamųjų,  $x$  ir  $y$ . Funkcinė  $x$  ir  $y$  priklausomybė  $y=f(x)$  nėra žinoma, bet žinoma apie nagrinėjamo proceso greitį, kurį apibrėžia  $y'$ .

Tarkime, kad proceso greitis ( $y$  kitimo greitis) proporcingas pačiam  $y$ . Tuomet šio proceso matematinis modelis yra diferencialinė lygtis  $y'=ky$  ( $k$  – proporcingumo koeficientas).

Turėdami diferencialinę lygtį, iš pradžių randame jos bendrąjį sprendinį. Po to, panaudoję turimas pradines sąlygas ir papildomus duomenis, randame atskirąjį sprendinį  $y=f(x)$ .

#### Pavyzdžiai

1) Jei cheminio elemento skilimo greitis (jo masės  $y$  kitimo greitis) proporcingas masei laiko momentu  $t$ , tai masės ir laiko funkcinė priklausomybė  $y=f(t)$  randama iš diferencialinės lygties  $y'=ky$ .

2) Jei besisukantį diską stabdo trinties jėga, proporcinga sukimosi kampiniam greičiui  $\omega$ , tai šio greičio priklausomybė nuo laiko  $t$  randama, jei iš diferencialinės lygties  $\omega'=k\omega$ .

3) Jei tiesiai judančio kūno greitis  $V$  proporcingas laiko  $t$  kvadratui, tai nueito kelio  $S$  priklausomybė nuo laiko  $t$  randama iš diferencialinės lygties  $S'=kt^2$ . Šią lygtį išsprendžiame:

$$S = \int kt^2 dt = k \cdot \frac{t^3}{3} + C.$$

Tarkime, kad

$$S=0, \text{ kai } t=0;$$

$$S=18, \text{ kai } t=3.$$

Tuomet  $C=0$ ,  $k=2$  ir  $S=\frac{2}{3}t^3$ .

## Geometrijos uždaviniai, suvedami į pirmosios eilės diferencialines lygtis

Nagrinėsime tokius geometrijos uždavinius, kuriuose reikia rasti kreivės lygtį  $y = f(x)$  pagal žinomą kreivės bet kurios liestinės savybę. Šiuose uždaviniuose taikoma išvestinės geometrinė prasmė: funkcijos išvestinės reikšmė duotame taške yra lygi šios funkcijos grafiko liestinės šiame taške krypties koeficientui. Be to, taikomi kai kurie analizinės geometrijos teiginiai ir pirmosios eilės diferencialinių lygčių sprendimo metodai. Pirmiausia užrašoma kreivės diferencialinė lygtis, po to randami jos bendrasis ir atskirasis sprendiniai.

### Pavyzdžiai

1) Jei liestinės bet kuriame kreivės taške  $M$  krypties koeficientas yra 2 kartus didesnis už tiesės  $OM$  krypties koeficientą, tai kreivės lygtis randama iš diferencialinės lygties:

$$y' = 2 \cdot \frac{y}{x}.$$

2) Tarkime, kad kreivės bet kurios liestinės atkarpa, esanti tarp lietimosi taško  $M(x, y)$  ir  $Ox$  ašies, kirsdama  $Oy$  ašį dalijama pusiau. Pritaikome kreivės  $y = f(x)$  liestinės, nubrėžtos per lietimosi tašką  $M(x, y)$ , lygtį:

$$Y - y = y'(X - x);$$

čia  $(X, Y)$  – bet kurio liestinės taško koordinatės.

Jei liestinės tašką, kuriame ji kerta  $Ox$  ašį, pažymėsime  $N$ , tai atsižvelgę į nurodytą liestinės savybę, kad jos atkarpą  $MN$   $Oy$  ašis dalo pusiau, gausime  $N$  koordinatės:  $N(-x, 0)$ . Įrašome šio taško koordinatės į liestinės lygtį:

$$0 - y = y'(-x - x).$$

Taigi ieškomos kreivės diferencialinė lygtis yra tokia:

$$y' = \frac{y}{2x}.$$

Ši lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais. Todėl:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow 2 \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$2 \ln|y| = \ln|x| - \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0; \Rightarrow x = \pm C_1 y^2.$$

Pažymėję  $C = \pm C_1$ , gauname parabolų lygtis

$$x = Cy^2, \quad C \neq 0.$$

Konkreči parabolė gaunama, žinant jos tašką, pavyzdžiui,

$$A(1, 1). \text{ Šiuo atveju: } x = y^2.$$

*5 uždavinys.* Suveskite uždavinį į pirmosios eilės tiesinę diferencialinę lygtį su atskiriamais kintamaisiais ir jį išspręskite.

Cheminės medžiagos skilimo greitis proporcingas jos masei  $m$  kiekvienu momentu  $t$ . Raskite masės priklausomybę nuo laiko  $t$ , jei  $m=m_0$ , kai  $t=t_0$ , ir  $m=m_1$ , kai  $t=t_1$  (masė  $m$  matuojama gramais, o laikas  $t$  – metais).

Nr. 1  $m_0=2, \quad m_1=1, \quad t_1=1600;$

Nr. 2  $m_0=10, \quad m_1=8, \quad t_1=300;$

Nr. 3  $m_0=3, \quad m_1=1, \quad t_1=1000;$

Nr. 4  $m_0=5, \quad m_1=2, \quad t_1=2000.$

Kūno atšalimo greitis proporcingas kūno ir kambario temperatūrų skirtumui. Raskite kūno temperatūros  $T$  priklausomybę nuo laiko  $t$ , jei kambaryje, kurio temperatūra  $20^\circ \text{C}$ , kūnas per  $t_1$  minučių atvėso nuo  $T_1$  laipsnių iki  $T_2$  laipsnių. Per kiek laiko kūnas atvės iki  $T_3$  laipsnių?

Nr. 5  $T_1=100, \quad T_2=60, \quad T_3=25, \quad t_1=10;$

Nr. 6  $T_1=120, \quad T_2=70, \quad T_3=45, \quad t_1=10;$

Nr. 7  $T_1=100, \quad T_2=40, \quad T_3=25, \quad t_1=20;$

Nr. 8  $T_1=100, \quad T_2=60, \quad T_3=35, \quad t_1=20.$

Skystyje besisukantį diską stabdo trinties jėga, kuri proporcinga sukimosi kampiniam greičiui  $\omega$ . Raskite šio greičio priklausomybę nuo laiko  $t$ , jei iš pradžių diskas sukosi  $\omega_0 \frac{\text{aps}}{\text{min}}$

greičiu, o po  $t_1$  minučių sukosi  $\omega_1 \frac{\text{aps}}{\text{min}}$  greičiu. Koku greičiu

suksis diskas po  $t_2$  minučių nuo sukimosi pradžios?

Nr. 9  $\omega_0 = 200$ ,  $\omega_1 = 120$ ,  $t_1=1$ ,  $t_2=2$ ;

Nr. 10  $\omega_0 = 100$ ,  $\omega_1 = 50$ ,  $t_1=0,25$ ,  $t_2=0,5$ ;

Nr. 11  $\omega_0 = 180$ ,  $\omega_1 = 120$ ,  $t_1=1$ ,  $t_2=2$ ;

Nr. 12  $\omega_0 = 160$ ,  $\omega_1 = 120$ ,  $t_1=0,5$ ,  $t_2=1$ .

Motorinei valčiai ežere plaukiant  $v_0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  greičiu, variklis

buvo išjungtas, ir po  $t_1$  minučių valtės greitis sumažėjo iki  $v_1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

Raskite valtės greičio  $v$  priklausomybę nuo laiko  $t$ , jei vandens pasipriešinimo jėga proporcinga valtės greičiui. Koks bus valtės greitis po  $t_2$  minučių nuo variklio išjungimo?

Nr.13  $v_0=10$ ,  $v_1=0,5$ ,  $t_1=2$ ,  $t_2=\frac{2}{3}$ ;

Nr.14  $v_0=10$ ,  $v_1=6$ ,  $t_1=\frac{1}{3}$ ,  $t_2=2$ ;

Nr.15  $v_0=20$ ,  $v_1=5$ ,  $t_1=10$ ,  $t_2=5$ ;

Nr.16  $v_0=15$ ,  $v_1=5$ ,  $t_1=10$ ,  $t_2=4$ .

Tiesiai judančio kūno greitis  $V=kt^n$  ( $t$  – laikas,  $k$  – porcingumo koeficientas). Raskite nueito kelio  $S$  priklausomybę nuo laiko  $t$ , jei  $S=S_0$ , kai  $t=0$ . Kokį atstumą įveiks kūnas per pirmąsias  $t_1$  sekundes? (atstumas matuojamas metrais, o laikas – sekundėmis).

Nr.17  $n=2$ ,  $k=3$ ,  $S_0=10$ ,  $t_1=2$ ;

Nr.18  $n=2$ ,  $k=6$ ,  $S_0=5$ ,  $t_1=5$ ;

Nr.19  $n=3$ ,  $k=4$ ,  $S_0=3$ ,  $t_1=3$ ;

Nr.20  $n=3$ ,  $k=2$ ,  $S_0=5$ ,  $t_1=2$ .

Raskite lygtį kreivės, einančios per tašką  $A(x_1, y_1)$ , jei jos liestinės bet kuriame kreivės taške  $M$  krypties koeficientas yra  $n$  kartų didesnis už tiesės  $OM$  krypties koeficientą.

- Nr.21  $A(1, 1), n=3$ ; Nr.22  $A(2, 3), n=-1$ ;  
 Nr.23  $A(3, 4), n=3$ ; Nr.24  $A(1, 5), n=4$ ;  
 Nr.25  $A(1, 3), n=-3$ .

Raskite lygtį kreivės, einančios per tašką  $A(x_1, y_1)$ , jei jos liestinės atkarpa, esanti tarp koordinatų ašių, lietimosi taške  $M$  yra dalijama pusiau.

- Nr.26  $A(1, 4)$ ; Nr.27  $A(5, 4)$ ; Nr.28  $A(-1, -2)$ ;  
 Nr.29  $A(3, -1)$ ; Nr.30  $A(-2, 3)$ .

### Pirmosios eilės diferencialinių lygčių skaitinis sprendimas

Spręskime Koši uždavinį: reikia rasti pirmosios eilės diferencialinės lygties  $y' = f(x, y)$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą  $y(x_0) = y_0$ . Tarkime, kad funkcija  $f(x, y)$  yra tolydžioji ir jos dalinė išvestinė  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  yra aprėžtoji kurioje nors pradinio taško

$M_0(x_0, y_0)$  aplinkoje. Tada šioje aplinkoje Koši uždavinys turi vieną sprendinį.

Kai Koši uždavinio negalima išspręsti tiksliai, jį galima išspręsti apytiksliai. Šiuo atveju parenkamos nepriklausomo kintamojo reikšmės  $x_1=x_0+h, x_2=x_1+h, \dots, x_n=x_{n-1}+h$  ir pagal tam tikras formules apskaičiuojamos ieškomos funkcijos reikšmės  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Oilerio metodo formulės yra tokios:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Rungės ir Kutos metodo formulės:

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

### Pavyzdys

Pateiksime diferencialinės lygties

$$y' = (x^2 + 1) \cdot \ln(x + y)$$

atskirojo sprendinio, tenkinančio pradinę sąlygą  $y(1)=1$ , keturių  $y$  reikšmių ieškojimo, kai  $x$  įgyja reikšmes:  $x_1=x_0+h$ ,  $x_2=x_1+h$ ,  $x_3=x_2+h$ ,  $x_4=x_3+h$  ( $h=0,1$ ) rezultatus Oilerio bei Rungės ir Kutos metodais.

$x$	$y$
1,1	1,1386
1,2	1,3167
1,3	1,5419
1,4	1,8229

$x$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$y$
1,1	0,13863	0,15792	0,15887	0,18009	1,1587
1,2	0,18007	0,20321	0,20432	0,22965	1,3628
1,3	0,22963	0,25713	0,25842	0,28837	1,6210
1,4	0,28835	0,32072	0,32218	0,35725	1,9429

6 uždavins. Oilerio bei Rungės ir Kutos metodais apskaičiuokite pirmosios eilės diferencialinės lygties atskirojo sprendinio, tenkinančio pradinę sąlygą  $y(x_0)=y_0$ , keturias  $y$  reikšmes 0,0001 tikslumu, kai  $x$  įgyja reikšmes:  $x_1=x_0+h$ ,  $x_2=x_1+h$ ,  $x_3=x_2+h$ ,  $x_4=x_3+h$ . Žemiau pateiktame diferencialinių lygčių variante galima imti:  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $x_0=1$ ,  $y_0=1$ ,  $h=0,1$ .

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1) $y' = \sqrt{axy + by}$           | 2) $y' = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$         |
| 3) $y' = ax + b\sqrt{\frac{x}{y}}$  | 4) $y' = \sqrt{x + ay} + \frac{b}{y^2}$ |
| 5) $y' = a\sqrt{x} + b\sqrt{x + y}$ | 6) $y' = ax + b\sqrt{x + y}$            |

$$\begin{array}{ll}
7) \ y' = \frac{ax}{y^2} + b\sqrt{\frac{x}{y}} & 8) \ y' = ax + \frac{\sqrt{bx}}{y} \\
9) \ y' = \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + y}}{b} & 10) \ y' = ax + b\sin(x + y) \\
11) \ y' = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} & 12) \ y' = \sqrt{ax} + \frac{bx}{\sqrt{y}} \\
13) \ y' = ax + \sqrt{by + 4} & 14) \ y' = \frac{ax + y}{\sqrt{bx^2 + y^2}} \\
15) \ y' = \left(1 + \frac{ax}{y}\right) e^{\frac{y}{2b}} & 16) \ y' = \sqrt{ax + 1} \cdot e^{\frac{-bx}{5y}} \\
17) \ y' = \frac{\sqrt{ax^2 + 4}}{by + 5} & 18) \ y' = \frac{2x^2 - ay}{bx + y} \\
19) \ y' = (ax^2 + 1) \cdot e^{\frac{-x}{by}} & 20) \ y' = (ax + 2) \cdot \ln(2x + by) \\
21) \ y' = (2x^2 + a) \cdot \ln(bx + y) & 22) \ y' = \frac{a\ln(1 + by)}{x + 1} \\
23) \ y' = \frac{e^{ax-y}}{bx^2 + 4} & 24) \ y' = \frac{\ln(ax + y)}{bx^2 + 4} \\
25) \ y' = \frac{ax^2 + 1}{\ln(x + by)} & 26) \ y' = \sqrt{axy + by^2} \\
27) \ y' = ax + b\sqrt{\frac{y}{x}} & 28) \ y' = ax + b\ln(x + y) \\
29) \ y' = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{by + 1} & 30) \ y' = \frac{e^{ax-y}}{bx^2 + 1}
\end{array}$$



## 2. Išspręstosios užduotys

### Diferencialinių lygčių sprendimas

#### Pirmos eilės diferencialinės lygtys

1 uždavinys. Lygtys su atskiriamais kintamaisiais

- 1) Rasime lygties  $xy' + y = 0$  bendrąjį sprendinį.

Duotąją lygtį pertvarkome:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow xdy = -ydx$$

Tai jau lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Atskiriame kintamuosius ir abi gautosios

lygties puses suintegruojame:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

iš kur gauname bendrąjį sprendinį:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

- 2) Rasime lygties  $y'tgx - y = 4$  bendrąjį sprendinį.

Duotąją lygtį pertvarkome:

$$tgx \frac{dy}{dx} = y + 4 \Rightarrow \frac{dy}{y + 4} = \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

Tai jau lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Atskiriame kintamuosius ir abi gautosios

lygties puses suintegruojame:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y + 4} &= -\frac{dx}{tgx} \Rightarrow \frac{dy}{y + 4} = \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{y + 4} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{d(y + 4)}{y + 4} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}, \end{aligned}$$

iš kur gauname bendrąjį sprendinį:

$$\ln|y+4| = \ln|\sin x| + \ln C \Rightarrow y+4 = C \sin x \Rightarrow y = C \sin x - 4.$$

3) Rasime lygties  $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

bendrąjį sprendinį.

Duotąją lygtį pertvarkome:

$$x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0.$$

Tai jau lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Atskiriame kintamuosius ir abi gautosios

lygties puses suintegruojame:

$$\frac{x dx}{1 - x^2} = -\frac{y dy}{y^2 + 1} \Rightarrow \int \frac{x dx}{1 - x^2} = -\int \frac{y dy}{y^2 + 1} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{1 - x^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(1 - x^2)}{1 - x^2} = \int \frac{d(1 + y^2)}{1 + y^2},$$

iš kur gauname bendrąjį sprendinį:

$$\ln|1 - x^2| = \ln|1 + y^2| + \ln C \Rightarrow 1 - x^2 = C(1 + y^2) \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{C} - 1}.$$

## 2 uždavinys. Homogeninės lygtys

1) Rasime diferencialinės lygties  $(x - y)dy = ydx$

bendrąjį sprendinį.

Įsitikinkime, kad ši lygtis homogeninė:

$$(\lambda x - \lambda y)d(\lambda y) = \lambda y d(\lambda x),$$

$$\lambda^2(x - y)dy = \lambda^2 y dx,$$

$$(x - y)dy = y dx.$$

Pertvarkome lygtį:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - y},$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{x - \frac{y}{x}}.$$

Pakeičiame kintamąjį  $u = \frac{y}{x}$ , iš kur  $y = ux$ . Tada  $y' = u'x + u$ .

Įstačius keitinius  
į lygtį, gauname

$$u'x + u = \frac{u}{1-u}.$$

Šią lygtį pertvarkome į lygtį su atskiriamais kintamaisiais:

$$u'x = \frac{u}{1-u} - u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u + u^2 - u}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{u^2} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{u^2} - \frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

Abi gautos lygties puses integruojame:

$$\int \frac{du}{u^2} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln C.$$

Vietoj  $u$  įrašę  $\frac{y}{x}$ , gauname diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį:

$$-\frac{x^2}{y^2} - \ln|y| + \ln|x| = \ln|x| + \ln C$$

$$-\frac{x^2}{y^2} - \ln|y| = \ln C.$$

**2) Rasime diferencialinės lygties**

$$x \sin \frac{y}{x} y' + x = y \sin \frac{y}{x}$$

bendrąjį sprendinį.

Įsitikinkime, kad ši lygtis homogeninė:

$$\lambda x \cdot \sin \frac{\lambda y}{\lambda x} \cdot \frac{d(\lambda y)}{d(\lambda x)} + \lambda x = \lambda y \cdot \sin \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$\lambda \left( x \sin \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + x \right) = \lambda y \sin \frac{y}{x},$$

$$x \sin \frac{y}{x} y' + x = y \sin \frac{y}{x}.$$

Pakeičiame kintamąjį  $u = \frac{y}{x}$ , iš kur  $y = ux$ . Tada  $y' = u'x + u$ .

Ištačius keitinį

į lygtį, gauname

$$x \sin u(u'x + u) + x = xu \sin u$$

$$x^2 \sin u \cdot u' + xu \sin u + x = xu \sin u$$

$$x^2 \sin u \cdot u' = -x$$

$$x \sin u \cdot u' = -1$$

$$\sin u du = -\frac{dx}{x}.$$

Abi gautosios lygties puses integruojame:

$$\int \sin u du = -\int \frac{dx}{x}.$$

$$\cos u = \ln|x| + \ln C$$

Vietoj  $u$  įrašę  $\frac{y}{x}$ , gauname diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį:

$$\cos \frac{y}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

**3)** Rasime diferencialinės lygties  $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x}$

bendrąjį sprendinį.

Išitikinkime, kad ši lygtis homogeninė:

$$\frac{d(\lambda y)}{d(\lambda x)} = \frac{\lambda x}{2(\lambda y)} + \frac{\lambda y}{\lambda x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x}.$$

Pakeičiame kintamąjį  $u = \frac{y}{x}$ , iš kur  $y = ux$ . Tada  $y' = u'x + u$ .

Ištačius keitinius  
į lygtį, gauname:

$$u'x + u = \frac{1}{2u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{2u} \Rightarrow 2udu = \frac{dx}{x}.$$

Abi gautos lygties puses integruojame:

$$2 \int u du = \int \frac{dx}{x},$$

$$u^2 = \ln|x| + \ln C$$

Vietoj  $u$  įrašę  $\frac{y}{x}$ , gauname diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį:

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln|Cx|.$$

### 3 uždavinys. Tiesinės lygtys

1) Rasime diferencialinės lygties  $y' - \frac{y}{x} = x^2$

bendrąjį sprendinį.

Atliekame pakeitimą  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$ .

Duotąją lygtį pertvarkome:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2 \Rightarrow u'v + u \left( v' - \frac{v}{x} \right) = x^2.$$

Sprendžiame lygtį  $v' - \frac{v}{x} = 0$ . Tai lygtis su atskiriamais kintamaisiais.

Atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x|.$$

Tegu  $v = x$ . Tada, įstačius į lygtį ir suintegravus, turime

$$u'x = x^2 \Rightarrow du = xdx \Rightarrow \int du = \int xdx$$

$$\text{Iš čia: } u = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Taigi, } y = uv = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

- 2) Rasime diferencialinės lygties  $y' + y \tan x = \cos^2 x$  bendrąjį sprendinį.

Atliekame pakeitimą  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$ .

Duotąją lygtį pertvarkome:

$$u'v + uv' + uv \tan x = \cos^2 x.$$

$$u'v + u(v' + v \tan x) = \cos^2 x,$$

Sprendžiame lygtį  $v' + v \tan x = 0$ . Tai lygtis su atskiriamais kintamaisiais.

Atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\tan x dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{d \cos x}{\cos x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x|. \end{aligned}$$

Tegu  $v = \cos x$ . Tada, įstačius į lygtį ir suintegravus, turime

$$u' \cos x = \cos^2 x \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \int du = \int \cos x dx.$$

$$\text{Iš čia: } u = \sin x + C.$$

Taigi,  $y = uv = \sin x \cos x + \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x + C \cos x$ .

4 uždavinys. Bernulio lygtys

- 1) Rasime diferencialinės lygties  $2x^2 y' - 4xy = y^2$  bendrąjį sprendinį.

Pertvarkome lygtį, dalindami abi jos puses iš  $y^2 \neq 0$ .

Atliekame pakeitimą  $z = \frac{1}{y}$ ;  $z' = -\frac{1}{y^2} y'$  ir įstatome į lygtį:

$$-2x^2 z' - 4xz = 1 \Rightarrow z' + 2\frac{z}{x} = -\frac{1}{2x^2}$$

Tai jau tiesinė lygtis. Atliekame pakeitimą:  $z = uv$ ;  $z' = u'v + uv'$  ir pertvarkome sprendžiamą lygtį:

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = -\frac{1}{2x} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Sprendžiame lygtį  $v' + \frac{2v}{x} = 0$ . Tai lygtis su atskiriamais kintamaisiais.

Atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -2\ln|x| \Rightarrow |v| = \ln \frac{1}{x^2}.$$

Imame  $v = \frac{1}{x^2}$ . Tada, įstačius į lygtį ir suintegravus, turime:

$$\frac{1}{x^2} u' = -\frac{1}{2x^2} \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2} dx \Rightarrow \int du = -\frac{1}{2} \int dx. \text{ Iš čia}$$

$$u = -\frac{1}{2}x + C \text{ ir } 2 = uv = -\frac{1}{2x} + \frac{C}{x^2}.$$

$$\text{Tada } y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2x} + \frac{C}{x^2}} = \frac{2x^2}{2C - x}.$$

2) Rasime diferencialinės lygties  $(xy - x^2)y' = y^2$

bendrąjį sprendinį.

Pertvarkome lygtį:

$$xy - x^2 = \frac{y^2}{y'} \Rightarrow y^2 \frac{dx}{dy} yx = x^2.$$

Tai Bernulio lygtis atžvilgiu kintamojo  $x$ .

Padaliname abi jos puses iš  $x^2 \neq 0$ .

$$\frac{y^2}{x^2} \frac{dx}{dy} - \frac{1}{x} y = 1$$

$$\frac{1}{x^2} x' - \frac{1}{x} \frac{1}{y} = \frac{1}{y^2}$$

Atliekame pakeitimą  $z = \frac{1}{x}; z' = -\frac{1}{x^2} x'$  ir įstatome į lygtį:

$$-z' - \frac{z}{y} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' + \frac{z}{y} = -\frac{1}{y^2}.$$

Tai jau tiesinė lygtis. Atliekame pakeitimą:  $z = uv; z' = u'v + uv'$  ir

pertvarkome

sprendžiamą lygtį:

$$u'v + uv' + \frac{1}{y} uv = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow u'v + u \left( v' + \frac{v}{y} \right) = -\frac{1}{y^2}.$$

Sprendžiame lygtį  $v' + \frac{v}{y} = 0$ . Tai lygtis su atskiriamais

kintamaisiais.

Atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|y|.$$



Imame  $v = \frac{1}{y}$ . Tada, įstačius į lygtį ir suintegravus, turime:

$$-u' \frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow du = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int du = \int \frac{dy}{y}. \text{ Iš čia } u = \ln|y| + \ln C$$

$$\text{ir } z = uv = -\frac{1}{y} \ln|y| - \frac{1}{y} \ln C.$$

$$\text{Tada } x = \frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{y} \ln|y| - \frac{1}{y} \ln C}.$$

## 5 uždavinys. Pilnųjų diferencialų lygtys

1) Rasime diferencialinės lygties

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

bendrąjį sprendinį.

Įsitinkinkime, kad tai yra pilnųjų diferencialų lygtis, t.y.,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2x}{y^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \right).$$

Tikrindami gauname:

$$-\frac{6x}{y^4} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Tuomet kairė duotosios lygties pusė yra kurios nors funkcijos  $u = u(x, y)$

pilnasis diferencialas ir  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ . Iš čia, integruojami, gauname  $u$

išraišką:

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y).$$

Ieškome funkcijos  $u$  dalinės išvestinės pagal  $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^2}.$$

Iš čia  $\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$  ir, integruojant,  $\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C$ . Tuomet,

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C,$$

o bendrasis integralas lygus  $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$ .

2) Rasime diferencialinės lygties

$$\left( \frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left( y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$$

bendrąjį sprendinį.

Įsitinkinkime, kad tai yra pilnujų diferencialų lygtis,

$$\text{t.y., } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sin 2x}{y} + x \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right).$$

Tikrindami gauname:

$$-\frac{\sin 2x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2}.$$

Tuomet kairė duotosios lygties pusė yra kuris nors funkcijos  $u = u(x, y)$

pilnasis diferencialas ir  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x$ . Iš čia, integruojami,

gauname  $u$  išraišką:

$$u = \int \frac{\sin 2x}{y} dx + \int x dx + \varphi(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$$

Ieškome funkcijos  $u$  dalinės išvestinės pagal  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'(y) = \frac{\cos^2 x}{2y^2} - \frac{\sin^2 x}{2y^2} + \varphi'(y) = \frac{1 - \sin^2 x}{2y^2} - \frac{\sin^2 x}{2y^2} + \varphi'(y) = \\ &= \frac{1}{2y^2} - \frac{\sin^2 x}{y^2} + \varphi'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2};\end{aligned}$$

Iš čia,  $\varphi'(y) = y - \frac{1}{2y^2}$  ir, integruojant,  $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + C$ .

Tuomet,  $u(x, y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + C$ , o bendrasis

integralas

$$\text{lygus } \frac{\cos 2x}{2y} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y} = C.$$

### **Antrosios eilės paprasčiausių diferencialinių lygčių sprendimas**

- 1) Rasime lygties  $y'' = \frac{1}{x^2}$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinę

sąlygą

$$y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$y' = \int y'' dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y'(1) = 0$ , gauname

$$0 = -1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Taigi, } y' = -\frac{1}{x} + 1.$$

Integruodami šią lygtį su atskirais kintamaisiais, gauname:

$$dy = -\frac{dx}{x} + dx \Rightarrow \int dy = -\int \frac{dx}{x} + \int dx \Rightarrow y = -\ln|x| + x + C_2$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y(1) = 1$ , gauname

$$1 = -\ln 1 + 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Tuomet  $y = -\ln|x| + x$ .

- 2) Rasime lygties  $y'' = \ln x$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinės sąlygas

$$y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = 0.$$

$$y' = \int y'' dx = \int \ln x dx,$$

Integruojame dalimis:

$$y' = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C_1.$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y'(1) = 0$ , gauname

$$0 = \ln 1 - 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Taigi,  $y' = x \ln x - x + 1$ .

Integruodami šią lygtį su atskirais kintamaisiais, gauname:

$$dy = (x \ln x - x + 1) dx \Rightarrow \int dy = \int x \ln x dx - \int x dx + \int dx.$$

Integralą  $\int x \ln x dx$  integruojame dalimis:

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x d(x^2) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C_2.$$

Toliau integruodami, gauname:

$$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{x^2}{2} + x + C_2$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y(1) = \frac{1}{4}$ , gauname

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Tuomet  $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{x^2}{2} + x$ .

- 3) Rasime lygties  $xy'' + y' = x + 1$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines

$$\text{sąlygas } y(1) = \frac{5}{4}, y'(1) = \frac{5}{2}.$$

Lygtyje nėra funkcijos  $y$ , todėl keičiame kintamąjį pagal lygybę  $z = y'$ .

Tuomet  $z' = y''$ . Įstačius į lygtį, gauname:

$$xz' + z = x + 1.$$

Tai tiesinė lygtis, atliekame pakeitimą  $z = uv$ ,  $z' = u'v + uv'$  ir įstatome į lygtį:

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x} + 1.$$

Sprendžiame lygtį  $v' + \frac{v}{x} = 0$ .

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x|.$$

Imame  $v = \frac{1}{x}$  ir statome į lygtį:

$$\frac{1}{x}u' = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow u' = 1 + x \Rightarrow du = (1 + x)dx \Rightarrow \int du = \int (1 + x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \int (1 + x)d(1 + x) \Rightarrow u = \frac{(1 + x)^2}{2} + C_1$$

$$\text{Tuomet } z = uv = \frac{(1 + x)^2}{2x} + \frac{C_1}{x}.$$

$$\text{Iš čia } y' = \frac{(1 + x)^2}{2x} + \frac{C_1}{x}. \text{ Pritaikę pradines sąlygas } y'(1) = \frac{5}{2},$$

gauname:

$$\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \text{ ir } y' = \frac{(1 + x)^2}{2x} + \frac{1}{2x}.$$

Tai lygtis su atskiriamais kintamaisiais:

$$dy = \frac{(1+x)^2}{2x} dx + \frac{dx}{2x}.$$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \int dx + \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}$$

$$y = \ln|x| + \frac{x^2}{4} + x + C_2.$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y(1) = \frac{5}{4}$ , gauname

$$\frac{5}{4} = \ln 1 + \frac{1}{4} + 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$\text{Tad } y = \ln|x| + \frac{x^2}{4} + x.$$

- 4) Rasime lygties  $y'' = \frac{y'}{x} \left( 1 + \ln \frac{y'}{x} \right)$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines

$$\text{sąlygas } y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = e.$$

Lygtyje nėra funkcijos  $y$ , todėl keičiame kintamąjį pagal lygybę

$$z = y'. \text{ Tuomet}$$

$$z' = y''. \text{ Įstačius į lygtį, gauname:}$$

$$z' = \frac{z}{x} \left( 1 + \ln \frac{z}{x} \right).$$

Tai homogeninė lygtis, atliekame pakeitimą  $u = \frac{z}{x}$ ,

$$z = ux, z' = u'x + u \text{ ir įstatome}$$

į lygtį:

$$u'x + u = u + u \ln u \Rightarrow u'x = u \ln u.$$

Tai lygtis su atskiriamais kintamaisiais:

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{d \ln u}{\ln u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |\ln u| = \ln |x| + \ln C.$$

Imame  $\ln u = xC_1, u = e^{xC_1}$ , tada  $y' = z = ux = xe^{xC_1}$ .

Pritaikę pradinę sąlygą  $y'(1) = e$ , gauname:

$$e = e^{C_1} \Rightarrow C_1 = 1.$$

Tad  $y' = xe^x$ .

ai lygtis su atskiriamais kintamaisiais:

$$dy = xe^x dx \Rightarrow \int dy = \int xe^x dx \Rightarrow y = \int xe^x dx.$$

Išintegruojame dalimis:

$$y = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2.$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y(1) = \frac{1}{2}$ , gauname

$$\frac{1}{2} = e - e + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tad } y = xe^x - e^x + \frac{1}{2}.$$

##### 5) Rasime lygties

$$y'' = 72y^3$$

atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą  $y(2) = 1, y'(2) = 6$ .

Lygtyje nėra nepriklausomojo kintamojo  $x$ , todėl keičiame nežinomąją funkciją pagal

lygybę  $y = p'$ . Tuomet  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . Įstačius į lygtį, gauname:

$$p \frac{dp}{dy} = 72y^3.$$

Šioje lygtyje atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$pdp = 72y^3 dy \Rightarrow \int pdp = 72 \int y^3 dy \Rightarrow \frac{p^2}{2} = 72 \frac{y^4}{4} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow p^2 = 36y^4 + C_1.$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y(2) = 1, p = y'(2) = 6$ , randame konstantą  $C_1$ :

$$36 = 36 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{Tad } y'^2 = 36y^4.$$

Atsižvelgę, kad  $y$  ir  $y'$  yra teigiamos, gauname:  $y' = 6y^2$ .

Tuomet:

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2, \frac{dy}{y^2} = 6dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 6 \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 6x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{6x + C_2}.$$

Pritaikę pradinę sąlygą  $y(2) = 1$ , gauname  $1 = -\frac{1}{12 + C_2}$ , iš kur

$$C_2 = -13.$$

$$\text{Tuomet } y = \frac{1}{13 - 6x}.$$

- 6) Rasime lygties  $2yy'' = 1 + y'^2$  atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ .

Lygtyje nėra nepriklausomojo kintamojo  $x$ , todėl keičiame nežinomąją funkciją

pagal lygybę  $y = p$ . Tuomet  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . Įstačius į lygtį, gauname:

$$2yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2.$$

Šioje lygtyje atskiriame kintamuosius ir integruojame:



$$\begin{aligned}
2ypdp &= (1+p^2)dy \Rightarrow \frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y} \Rightarrow 2 \int \frac{pdp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int \frac{d(1+p^2)}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \int \frac{pdp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{d(1+p^2)}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(1+p^2) = \\
&= \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow 1+p^2 = C_1 y.
\end{aligned}$$

Pritaikę pradines sąlygas  $y(0)=1, p=y'(0)=1$ , randame konstantą  $C_1$ :

$$1+1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

$$\text{Tad } y'^2 = 2y-1 \Rightarrow y' = \sqrt{2y-1}.$$

Integruodami gauname:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d(2y-1)}{\sqrt{2y-1}} = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y-1} = x + C_2.$$

$$\text{Pritaikę pradinę sąlygą } y(0)=1, \text{ gauname } \sqrt{2-1} = C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Tuomet } \sqrt{2y-1} = x+1 \Rightarrow 2y-1 = (x+1)^2 \Rightarrow y = \frac{1+(x+1)^2}{2}.$$